Espacios normados de dimensión finita

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Suponemos conocidos los resultados básicos del espacio normado $(\mathbb{K}^N, \| \ \|_2)$:

Suponemos conocidos los resultados básicos del espacio normado $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$:

• **Teorema de complitud.** $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ es un espacio de Banach.

Suponemos conocidos los resultados básicos del espacio normado $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$:

• **Teorema de complitud.** $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ es un espacio de Banach.

• **Teorema de Bolzano–Weirtrass.** Toda sucesión acotada en $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ tiene alguna sucesión parcial convergente.

Suponemos conocidos los resultados básicos del espacio normado $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$:

• **Teorema de complitud.** $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ es un espacio de Banach.

• **Teorema de Bolzano–Weirtrass.** Toda sucesión acotada en $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ tiene alguna sucesión parcial convergente.

• **Teorema de Heine–Borel.** Los conjuntos compactos en $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ son los conjuntos cerrados y acotados.

Suponemos conocidos los resultados básicos del espacio normado $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$:

• **Teorema de complitud.** $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ es un espacio de Banach.

• **Teorema de Bolzano–Weirtrass.** Toda sucesión acotada en $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ tiene alguna sucesión parcial convergente.

• **Teorema de Heine–Borel.** Los conjuntos compactos en $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ son los conjuntos cerrados y acotados.

Teorema de Hausdorff. Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

Suponemos conocidos los resultados básicos del espacio normado $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$:

• **Teorema de complitud.** $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ es un espacio de Banach.

• **Teorema de Bolzano–Weirtrass.** Toda sucesión acotada en $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ tiene alguna sucesión parcial convergente.

• **Teorema de Heine–Borel.** Los conjuntos compactos en $(\mathbb{K}^N, \| \|_2)$ son los conjuntos cerrados y acotados.

Teorema de Hausdorff. Todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.

Puesto que normas equivalentes tienen las mismas sucesiones convergentes, las mismas sucesiones de Cauchy y los mismos conjuntos acotados, si X es un espacio de dimensión finita se puede hablar sin ninguna ambigüedad de convergencia, de acotación o de sucesiones de Cauchy en X, sin necesidad de especificar ninguna norma concreta.

Teorema (Consecuencias del teorema de Hausdorff).

- Toda aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en otro espacio normado es continua.

Teorema (Consecuencias del teorema de Hausdorff).

- Toda aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en otro espacio normado es continua.
- Toda biyección lineal entre espacios normados de dimensión finita es un isomorfismo topológico.

Teorema (Consecuencias del teorema de Hausdorff).

- Toda aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en otro espacio normado es continua.
- Toda biyección lineal entre espacios normados de dimensión finita es un isomorfismo topológico.
- Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.

Teorema (Consecuencias del teorema de Hausdorff).

- Toda aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en otro espacio normado es continua.
- Toda biyección lineal entre espacios normados de dimensión finita es un isomorfismo topológico.
- Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.
- Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es cerrado.

Teorema (Consecuencias del teorema de Hausdorff).

- Toda aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en otro espacio normado es continua.
- Toda biyección lineal entre espacios normados de dimensión finita es un isomorfismo topológico.
- Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.
- Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es cerrado.
- Toda sucesión acotada de puntos de un espacio normado de dimensión finita tiene alguna sucesión parcial convergente.

Teorema (Consecuencias del teorema de Hausdorff).

- Toda aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en otro espacio normado es continua.
- Toda biyección lineal entre espacios normados de dimensión finita es un isomorfismo topológico.
- Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.
- Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado es cerrado.
- Toda sucesión acotada de puntos de un espacio normado de dimensión finita tiene alguna sucesión parcial convergente.
- En un espacio normado de dimensión finita los conjuntos compactos son los conjuntos cerrados y acotados.

Dada la importancia de la compacidad para resolver multitud de problemas, nos preguntamos si en un espacio normado de dimensión infinita podemos asegurar la abundancia de conjuntos compactos. La respuesta es bastante sorprendente.

Dada la importancia de la compacidad para resolver multitud de problemas, nos preguntamos si en un espacio normado de dimensión infinita podemos asegurar la abundancia de conjuntos compactos. La respuesta es bastante sorprendente.

Lema de Riesz.

- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial propio y de dimensión finita de X. Entonces existe $x \in S_X$ tal que $\mathrm{dist}(x, M) = 1$.*

Dada la importancia de la compacidad para resolver multitud de problemas, nos preguntamos si en un espacio normado de dimensión infinita podemos asegurar la abundancia de conjuntos compactos. La respuesta es bastante sorprendente.

Lema de Riesz.

- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial propio y de dimensión finita de X. Entonces existe $x \in S_X$ tal que* $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.
- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado propio de X. Entonces para todo $\alpha \in]0,1[$ existe $x \in S_X$ tal que* $\operatorname{dist}(x, M) > \alpha$.

Dada la importancia de la compacidad para resolver multitud de problemas, nos preguntamos si en un espacio normado de dimensión infinita podemos asegurar la abundancia de conjuntos compactos. La respuesta es bastante sorprendente.

Lema de Riesz.

- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial propio y de dimensión finita de X. Entonces existe $x \in S_X$ tal que* $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.
- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado propio de X. Entonces para todo $\alpha \in]0,1[$ existe $x \in S_X$ tal que* $\operatorname{dist}(x, M) > \alpha$.

Dada la importancia de la compacidad para resolver multitud de problemas, nos preguntamos si en un espacio normado de dimensión infinita podemos asegurar la abundancia de conjuntos compactos. La respuesta es bastante sorprendente.

Lema de Riesz.

- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial propio y de dimensión finita de X. Entonces existe $x \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.*
- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado propio de X. Entonces para todo $\alpha \in]0,1[$ existe $x \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) > \alpha$.*

Si $\overline{B}(a,r)$ y $\overline{B}(b,s)$ son dos bolas cerradas de radios positivos en un espacio normado, la aplicación $x \mapsto b + \frac{s}{r}(x-a)$ es un homeomorfismo de $\overline{B}(a,r)$ sobre $\overline{B}(b,s)$. Por tanto, todas las bolas cerradas de radios positivos en un espacio normado son homeomorfas y, en consecuencia, si una de ellas es compacta todas son compactas.

Dada la importancia de la compacidad para resolver multitud de problemas, nos preguntamos si en un espacio normado de dimensión infinita podemos asegurar la abundancia de conjuntos compactos. La respuesta es bastante sorprendente.

Lema de Riesz.

- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial propio y de dimensión finita de X. Entonces existe $x \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.*
- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado propio de X. Entonces para todo $\alpha \in]0,1[$ existe $x \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) > \alpha$.*

Si $\overline{B}(a,r)$ y $\overline{B}(b,s)$ son dos bolas cerradas de radios positivos en un espacio normado, la aplicación $x \mapsto b + \frac{s}{r}(x-a)$ es un homeomorfismo de $\overline{B}(a,r)$ sobre $\overline{B}(b,s)$. Por tanto, todas las bolas cerradas de radios positivos en un espacio normado son homeomorfas y, en consecuencia, si una de ellas es compacta todas son compactas.

Recuerda que un espacio topológico se dice **localmente compacto** cuando todo punto tiene un entorno compacto.

Dada la importancia de la compacidad para resolver multitud de problemas, nos preguntamos si en un espacio normado de dimensión infinita podemos asegurar la abundancia de conjuntos compactos. La respuesta es bastante sorprendente.

Lema de Riesz.

- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial propio y de dimensión finita de X. Entonces existe $x \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) = 1$.*
- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado propio de X. Entonces para todo $\alpha \in]0,1[$ existe $x \in S_X$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) > \alpha$.*

Si $\overline{B}(a,r)$ y $\overline{B}(b,s)$ son dos bolas cerradas de radios positivos en un espacio normado, la aplicación $x \mapsto b + \frac{s}{r}(x-a)$ es un homeomorfismo de $\overline{B}(a,r)$ sobre $\overline{B}(b,s)$. Por tanto, todas las bolas cerradas de radios positivos en un espacio normado son homeomorfas y, en consecuencia, si una de ellas es compacta todas son compactas.

Recuerda que un espacio topológico se dice **localmente compacto** cuando todo punto tiene un entorno compacto.En un espacio normado es evidente que todo entorno de un punto contiene una bola cerrada de radio positivo.

Dada la importancia de la compacidad para resolver multitud de problemas, nos preguntamos si en un espacio normado de dimensión infinita podemos asegurar la abundancia de conjuntos compactos. La respuesta es bastante sorprendente.

Lema de Riesz.

- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial propio y de dimensión finita de X. Entonces existe $x \in S_X$ tal que* $\operatorname{dist}(x,M) = 1$.
- *Sea X un espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado propio de X. Entonces para todo $\alpha \in]0,1[$ existe $x \in S_X$ tal que* $\operatorname{dist}(x,M) > \alpha$.

Si $\overline{B}(a,r)$ y $\overline{B}(b,s)$ son dos bolas cerradas de radios positivos en un espacio normado, la aplicación $x \mapsto b + \frac{s}{r}(x-a)$ es un homeomorfismo de $\overline{B}(a,r)$ sobre $\overline{B}(b,s)$. Por tanto, todas las bolas cerradas de radios positivos en un espacio normado son homeomorfas y, en consecuencia, si una de ellas es compacta todas son compactas.

Recuerda que un espacio topológico se dice **localmente compacto** cuando todo punto tiene un entorno compacto.En un espacio normado es evidente que todo entorno de un punto contiene una bola cerrada de radio positivo.Por tanto, si un espacio normado es localmente compacto, entonces todas las bolas cerradas son compactos, y también todos los conjuntos cerrados y acotados son compactos, porque todo conjunto acotado está contenido en una bola cerrada.

Teorema de Riesz.

A) *Sea X un espacio normado de dimensión infinita, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de vectores en la esfera unidad de X, tal que $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ siempre que $n \neq m$. En consecuencia, la esfera unidad, S_X, y la bola unidad, B_X, no son compactos, de hecho ninguna bola cerrada de radio positivo es compacta y, por tanto, los compactos tienen interior vacío.*

Teorema de Riesz.

A) *Sea X un espacio normado de dimensión infinita, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de vectores en la esfera unidad de X, tal que $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ siempre que $n \neq m$. En consecuencia, la esfera unidad, S_X, y la bola unidad, B_X, no son compactos, de hecho ninguna bola cerrada de radio positivo es compacta y, por tanto, los compactos tienen interior vacío.*

B) *Para un espacio normado X equivalen las siguientes afirmaciones:*

Teorema de Riesz.

A) *Sea X un espacio normado de dimensión infinita, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de vectores en la esfera unidad de X, tal que $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ siempre que $n \neq m$. En consecuencia, la esfera unidad, S_X, y la bola unidad, B_X, no son compactos, de hecho ninguna bola cerrada de radio positivo es compacta y, por tanto, los compactos tienen interior vacío.*

B) *Para un espacio normado X equivalen las siguientes afirmaciones:*

   i) *La topología de la norma en X es localmente compacta.*

Teorema de Riesz.

A) *Sea X un espacio normado de dimensión infinita, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de vectores en la esfera unidad de X, tal que $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ siempre que $n \neq m$. En consecuencia, la esfera unidad, S_X, y la bola unidad, B_X, no son compactos, de hecho ninguna bola cerrada de radio positivo es compacta y, por tanto, los compactos tienen interior vacío.*

B) *Para un espacio normado X equivalen las siguientes afirmaciones:*

   i) *La topología de la norma en X es localmente compacta.*

   ii) *Los conjuntos cerrados y acotados son compactos.*

Teorema de Riesz.

A) *Sea X un espacio normado de dimensión infinita, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de vectores en la esfera unidad de X, tal que $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ siempre que $n \neq m$. En consecuencia, la esfera unidad, S_X, y la bola unidad, B_X, no son compactos, de hecho ninguna bola cerrada de radio positivo es compacta y, por tanto, los compactos tienen interior vacío.*

B) *Para un espacio normado X equivalen las siguientes afirmaciones:*

  i) *La topología de la norma en X es localmente compacta.*
  ii) *Los conjuntos cerrados y acotados son compactos.*
  iii) *La bola unidad B_X es compacto.*

Teorema de Riesz.

A) *Sea X un espacio normado de dimensión infinita, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de vectores en la esfera unidad de X, tal que $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ siempre que $n \neq m$. En consecuencia, la esfera unidad, S_X, y la bola unidad, B_X, no son compactos, de hecho ninguna bola cerrada de radio positivo es compacta y, por tanto, los compactos tienen interior vacío.*

B) *Para un espacio normado X equivalen las siguientes afirmaciones:*

   i) *La topología de la norma en X es localmente compacta.*
   ii) *Los conjuntos cerrados y acotados son compactos.*
   iii) *La bola unidad B_X es compacto.*
   iv) *La esfera unidad S_X es compacto.*

Teorema de Riesz.

A) *Sea X un espacio normado de dimensión infinita, entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de vectores en la esfera unidad de X, tal que $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ siempre que $n \neq m$. En consecuencia, la esfera unidad, S_X, y la bola unidad, B_X, no son compactos, de hecho ninguna bola cerrada de radio positivo es compacta y, por tanto, los compactos tienen interior vacío.*

B) *Para un espacio normado X equivalen las siguientes afirmaciones:*

   i) *La topología de la norma en X es localmente compacta.*
   ii) *Los conjuntos cerrados y acotados son compactos.*
   iii) *La bola unidad B_X es compacto.*
   iv) *La esfera unidad S_X es compacto.*
   v) *X es de dimensión finita.*

Dados dos espacios normados X e Y, se llama espacio **normado producto** al espacio vectorial $X \times Y$ dotado de cualquier norma que induzca la topología producto en dicho espacio.

Dados dos espacios normados X e Y, se llama espacio **normado producto** al espacio vectorial $X \times Y$ dotado de cualquier norma que induzca la topología producto en dicho espacio.Por ejemplo, las normas

$$\|(x,y)\|_p = \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \ (1 \leqslant p); \quad \|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

Dados dos espacios normados X e Y, se llama espacio **normado producto** al espacio vectorial $X \times Y$ dotado de cualquier norma que induzca la topología producto en dicho espacio.Por ejemplo, las normas

$$\|(x,y)\|_p = \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \ (1 \leqslant p); \quad \|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$$

son todas ellas equivalentes como se deduce de las desigualdades

$$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_p \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty \quad ((x,y) \in X \times Y)$$

Dados dos espacios normados X e Y, se llama espacio **normado producto** al espacio vectorial $X \times Y$ dotado de cualquier norma que induzca la topología producto en dicho espacio.Por ejemplo, las normas

$$\|(x,y)\|_p = \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1 \leqslant p); \qquad \|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$$

son todas ellas equivalentes como se deduce de las desigualdades

$$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_p \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty \quad ((x,y) \in X \times Y)$$

Y es claro que la norma $\|(\cdot,\cdot)\|_\infty$ induce la topología producto en $X \times Y$ pues las bolas abiertas en dicha norma son productos de bolas abiertas en X e Y.

Dados dos espacios normados X e Y, se llama espacio **normado producto** al espacio vectorial $X \times Y$ dotado de cualquier norma que induzca la topología producto en dicho espacio.Por ejemplo, las normas

$$\|(x,y)\|_p = \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \ (1 \leqslant p); \quad \|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$$

son todas ellas equivalentes como se deduce de las desigualdades

$$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_p \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty \quad ((x,y) \in X \times Y)$$

Y es claro que la norma $\|(\cdot,\cdot)\|_\infty$ induce la topología producto en $X \times Y$ pues las bolas abiertas en dicha norma son productos de bolas abiertas en X e Y.Suele emplearse la notación $X \oplus_p Y$ para representar el espacio normado producto $(X \times Y, \| \ \|_p)$.

Dados dos espacios normados X e Y, se llama espacio **normado producto** al espacio vectorial $X \times Y$ dotado de cualquier norma que induzca la topología producto en dicho espacio.Por ejemplo, las normas

$$\|(x,y)\|_p = \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \ (1 \leqslant p); \quad \|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$$

son todas ellas equivalentes como se deduce de las desigualdades

$$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_p \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty \quad ((x,y) \in X \times Y)$$

Y es claro que la norma $\|(\cdot,\cdot)\|_\infty$ induce la topología producto en $X \times Y$ pues las bolas abiertas en dicha norma son productos de bolas abiertas en X e Y.Suele emplearse la notación $X \oplus_p Y$ para representar el espacio normado producto $(X \times Y, \| \ \|_p)$.

Sea ahora X un espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado de X. Definiendo

$$\|x + M\| = \text{dist}(x, M) = \text{ínf}\{\|x - m\| : m \in M\} = \text{ínf}\{\|x + m\| : m \in M\}$$

Dados dos espacios normados X e Y, se llama espacio **normado producto** al espacio vectorial $X \times Y$ dotado de cualquier norma que induzca la topología producto en dicho espacio.Por ejemplo, las normas

$$\|(x,y)\|_p = \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ \ (1 \leqslant p); \quad \|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$$

son todas ellas equivalentes como se deduce de las desigualdades

$$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_p \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty \quad ((x,y) \in X \times Y)$$

Y es claro que la norma $\|(\cdot,\cdot)\|_\infty$ induce la topología producto en $X \times Y$ pues las bolas abiertas en dicha norma son productos de bolas abiertas en X e Y.Suele emplearse la notación $X \oplus_p Y$ para representar el espacio normado producto $(X \times Y, \| \ \|_p)$.

Sea ahora X un espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado de X. Definiendo

$$\|x + M\| = \text{dist}(x, M) = \text{ínf}\{\|x - m\| : m \in M\} = \text{ínf}\{\|x + m\| : m \in M\}$$

se obtiene una norma en el espacio vectorial cociente X/M, dicha norma se llama **norma cociente** y el espacio X/M con dicha norma se llama **espacio normado cociente**.

Dados dos espacios normados X e Y, se llama espacio **normado producto** al espacio vectorial $X \times Y$ dotado de cualquier norma que induzca la topología producto en dicho espacio.Por ejemplo, las normas

$$\|(x,y)\|_p = \left(\|x\|^p + \|y\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ (1 \leqslant p); \quad \|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\{\|x\|, \|y\|\}$$

son todas ellas equivalentes como se deduce de las desigualdades

$$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_p \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty \quad ((x,y) \in X \times Y)$$

Y es claro que la norma $\|(\cdot,\cdot)\|_\infty$ induce la topología producto en $X \times Y$ pues las bolas abiertas en dicha norma son productos de bolas abiertas en X e Y.Suele emplearse la notación $X \oplus_p Y$ para representar el espacio normado producto $(X \times Y, \| \ \|_p)$.

Sea ahora X un espacio normado y M un subespacio vectorial cerrado de X. Definiendo

$$\|x + M\| = \text{dist}(x, M) = \text{ínf}\{\|x - m\| : m \in M\} = \text{ínf}\{\|x + m\| : m \in M\}$$

se obtiene una norma en el espacio vectorial cociente X/M, dicha norma se llama **norma cociente** y el espacio X/M con dicha norma se llama **espacio normado cociente**. La aplicación $\pi : X \to X/M$ definida por $\pi(x) = x + M$ para todo $x \in X$ se llama **epimorfismo cociente** o, simplemente, **aplicación cociente** y es lineal y sobreyectiva.

Proposición. *Sean X un espacio normado, M un subespacio cerrado propio de X y $\pi : X \to X/M$ la aplicación cociente. Entonces se verifica*

Proposición. *Sean X un espacio normado, M un subespacio cerrado propio de X y $\pi : X \to X/M$ la aplicación cociente. Entonces se verifica*

- *π es continua y $\|\pi\| = 1$.*

Proposición. *Sean X un espacio normado, M un subespacio cerrado propio de X y $\pi : X \to X/M$ la aplicación cociente. Entonces se verifica*

- *π es continua y $\|\pi\| = 1$.*
- *$\pi(B(x,r)) = B(x+M,r)$ para todo $x \in X$, por tanto π es abierta.*

Proposición. *Sean X un espacio normado, M un subespacio cerrado propio de X y $\pi : X \to X/M$ la aplicación cociente. Entonces se verifica*

- *π es continua y $\|\pi\| = 1$.*
- *$\pi(B(x,r)) = B(x+M,r)$ para todo $x \in X$, por tanto π es abierta.*
- *Sea Z un espacio normado y $S : X/M \to Z$ una aplicación lineal, entonces S es continua si, y sólo si, $S \circ \pi : X \to Z$ es continua.*

Proposición. *Sean X un espacio normado, M un subespacio cerrado propio de X y $\pi : X \to X/M$ la aplicación cociente. Entonces se verifica*

- π *es continua y* $\|\pi\| = 1$.
- $\pi(B(x,r)) = B(x+M,r)$ *para todo* $x \in X$, *por tanto* π *es abierta.*
- *Sea Z un espacio normado y $S : X/M \to Z$ una aplicación lineal, entonces S es continua si, y sólo si, $S \circ \pi : X \to Z$ es continua.*

Proposición. *Sean X un espacio normado, M un subespacio cerrado propio de X y $\pi : X \to X/M$ la aplicación cociente. Entonces se verifica*

- π *es continua y* $\|\pi\| = 1$.
- $\pi(B(x,r)) = B(x+M,r)$ *para todo* $x \in X$, *por tanto* π *es abierta.*
- *Sea Z un espacio normado y $S : X/M \to Z$ una aplicación lineal, entonces S es continua si, y sólo si, $S \circ \pi : X \to Z$ es continua*.

Acabamos de ver que la topología inducida en X/M por la norma cociente es la *topología cociente*, es decir, la mayor topología en X/M que hace continua a la aplicación cociente π.

Proposición. *Sean X un espacio normado, M un subespacio cerrado propio de X y $\pi : X \to X/M$ la aplicación cociente. Entonces se verifica*

- π *es continua y* $\|\pi\| = 1$.
- $\pi(B(x,r)) = B(x+M,r)$ *para todo* $x \in X$, *por tanto* π *es abierta.*
- *Sea Z un espacio normado y $S : X/M \to Z$ una aplicación lineal, entonces S es continua si, y sólo si, $S \circ \pi : X \to Z$ es continua*.

Acabamos de ver que la topología inducida en X/M por la norma cociente es la *topología cociente*, es decir, la mayor topología en X/M que hace continua a la aplicación cociente π.

Proposición. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal continuo. Sean $\pi : X \to X/M$ el epimorfismo cociente y $\widetilde{T} : X/\ker(T) \to Y$ el* ***monomorfismo cociente****, definido por $\widetilde{T}(x + \ker T) = T(x)$ para todo $x \in X$. Se verifica que*

Proposición. *Sean X un espacio normado, M un subespacio cerrado propio de X y $\pi : X \to X/M$ la aplicación cociente. Entonces se verifica*

- *π es continua y $\|\pi\| = 1$.*
- *$\pi(B(x,r)) = B(x+M,r)$ para todo $x \in X$, por tanto π es abierta.*
- *Sea Z un espacio normado y $S : X/M \to Z$ una aplicación lineal, entonces S es continua si, y sólo si, $S \circ \pi : X \to Z$ es continua.*

Acabamos de ver que la topología inducida en X/M por la norma cociente es la *topología cociente*, es decir, la mayor topología en X/M que hace continua a la aplicación cociente π.

Proposición. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal continuo. Sean $\pi : X \to X/M$ el epimorfismo cociente y $\widetilde{T} : X/\ker(T) \to Y$ el **monomorfismo cociente**, definido por $\widetilde{T}(x + \ker T) = T(x)$ para todo $x \in X$. Se verifica que*

- *$\widetilde{T}$ es lineal, inyectivo y continuo con $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.*

Proposición. *Sean X un espacio normado, M un subespacio cerrado propio de X y $\pi : X \to X/M$ la aplicación cociente. Entonces se verifica*

- π *es continua y* $\|\pi\| = 1$.
- $\pi(B(x,r)) = B(x+M,r)$ *para todo* $x \in X$*, por tanto* π *es abierta.*
- *Sea Z un espacio normado y $S : X/M \to Z$ una aplicación lineal, entonces S es continua si, y sólo si, $S \circ \pi : X \to Z$ es continua*.

Acabamos de ver que la topología inducida en X/M por la norma cociente es la *topología cociente*, es decir, la mayor topología en X/M que hace continua a la aplicación cociente π.

Proposición. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal continuo. Sean $\pi : X \to X/M$ el epimorfismo cociente y $\widetilde{T} : X/\ker(T) \to Y$ el **monomorfismo cociente**, definido por $\widetilde{T}(x + \ker T) = T(x)$ para todo $x \in X$. Se verifica que*

- $\widetilde{T}$ *es lineal, inyectivo y continuo con* $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.
- $\widetilde{T}$ *es un isomorfismo topológico de $X/\ker(T)$ sobre $T(X)$ si, y sólo si, $\widetilde{T} \circ \pi$ es una aplicación abierta de X sobre $T(X)$.*

Corolario. *Sea* $T : X \to Y$ *un operador lineal de un espacio normado* X *en un espacio normado* Y*.*

Corolario. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal de un espacio normado X en un espacio normado Y.*

- *Si $T(X)$ es de dimensión finita, entonces T es continuo si, y sólo si, $ker(T)$ es cerrado.*

Corolario. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal de un espacio normado X en un espacio normado Y.*

- *Si $T(X)$ es de dimensión finita, entonces T es continuo si, y sólo si, $ker(T)$ es cerrado.*
- *Si Y es de dimensión finita, entonces T es una aplicación abierta si, y sólo si, es sobreyectiva.*

Corolario. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal de un espacio normado X en un espacio normado Y.*

- *Si $T(X)$ es de dimensión finita, entonces T es continuo si, y sólo si, $ker(T)$ es cerrado.*
- *Si Y es de dimensión finita, entonces T es una aplicación abierta si, y sólo si, es sobreyectiva.*

Corolario. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal de un espacio normado X en un espacio normado Y.*

- *Si $T(X)$ es de dimensión finita, entonces T es continuo si, y sólo si, $ker(T)$ es cerrado.*
- *Si Y es de dimensión finita, entonces T es una aplicación abierta si, y sólo si, es sobreyectiva.*

Recuerda que si X es un espacio vectorial, y M, N, son subespacios de X tales que $X = M + N$ y $M \cap N = \{0\}$, se dice que X es **suma directa** de M y N, y escribimos $X = M \oplus N$.

Corolario. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal de un espacio normado X en un espacio normado Y.*

- *Si $T(X)$ es de dimensión finita, entonces T es continuo si, y sólo si, $ker(T)$ es cerrado.*
- *Si Y es de dimensión finita, entonces T es una aplicación abierta si, y sólo si, es sobreyectiva.*

Recuerda que si X es un espacio vectorial, y M, N, son subespacios de X tales que $X = M + N$ y $M \cap N = \{0\}$, se dice que X es **suma directa** de M y N, y escribimos $X = M \oplus N$.En tal caso, cada vector $x \in X$ puede escribirse de manera única en la forma $x = m + n$ con $m \in M$ y $n \in N$.

Corolario. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal de un espacio normado X en un espacio normado Y.*

- *Si $T(X)$ es de dimensión finita, entonces T es continuo si, y sólo si, $ker(T)$ es cerrado.*
- *Si Y es de dimensión finita, entonces T es una aplicación abierta si, y sólo si, es sobreyectiva.*

Recuerda que si X es un espacio vectorial, y M, N, son subespacios de X tales que $X = M + N$ y $M \cap N = \{0\}$, se dice que X es **suma directa** de M y N, y escribimos $X = M \oplus N$.En tal caso, cada vector $x \in X$ puede escribirse de manera única en la forma $x = m + n$ con $m \in M$ y $n \in N$.Se dice que M y N son *espacios complementarios* y que cada uno de ellos es un *complemento algebraico del otro*.

Corolario. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal de un espacio normado X en un espacio normado Y.*

- *Si $T(X)$ es de dimensión finita, entonces T es continuo si, y sólo si, $\ker(T)$ es cerrado.*
- *Si Y es de dimensión finita, entonces T es una aplicación abierta si, y sólo si, es sobreyectiva.*

Recuerda que si X es un espacio vectorial, y M, N, son subespacios de X tales que $X = M + N$ y $M \cap N = \{0\}$, se dice que X es **suma directa** de M y N, y escribimos $X = M \oplus N$.En tal caso, cada vector $x \in X$ puede escribirse de manera única en la forma $x = m + n$ con $m \in M$ y $n \in N$.Se dice que M y N son *espacios complementarios* y que cada uno de ellos es un *complemento algebraico del otro*.

Como consecuencia de que siempre es posible extender una base de un subespacio a una base del espacio total, todo subespacio tiene complementos algebraicos que, salvo trivialidad, no son únicos.

Corolario. *Sea* $T : X \to Y$ *un operador lineal de un espacio normado* X *en un espacio normado* Y*.*

- *Si* $T(X)$ *es de dimensión finita, entonces* T *es continuo si, y sólo si,* $\ker(T)$ *es cerrado.*
- *Si* Y *es de dimensión finita, entonces* T *es una aplicación abierta si, y sólo si, es sobreyectiva.*

Recuerda que si X es un espacio vectorial, y M, N, son subespacios de X tales que $X = M + N$ y $M \cap N = \{0\}$, se dice que X es **suma directa** de M y N, y escribimos $X = M \oplus N$.En tal caso, cada vector $x \in X$ puede escribirse de manera única en la forma $x = m + n$ con $m \in M$ y $n \in N$.Se dice que M y N son *espacios complementarios* y que cada uno de ellos es un *complemento algebraico del otro*.

Como consecuencia de que siempre es posible extender una base de un subespacio a una base del espacio total, todo subespacio tiene complementos algebraicos que, salvo trivialidad, no son únicos.

Un operador lineal $P : X \to X$ tal que $P^2 = P$ se llama un **idempotente** y también una **proyección**.

Vamos a ver que en todo espacio vectorial hay una correspondencia biunívoca entre sumas directas y proyecciones.

Vamos a ver que en todo espacio vectorial hay una correspondencia biunívoca entre sumas directas y proyecciones.

Proposición. *Sea X un espacio vectorial, $P : X \to X$ una aplicación lineal, y M, N subespacios de X.*

Vamos a ver que en todo espacio vectorial hay una correspondencia biunívoca entre sumas directas y proyecciones.

Proposición. *Sea X un espacio vectorial, $P : X \to X$ una aplicación lineal, y M, N subespacios de X.*

- *P es una proyección si, y sólo si, $I - P$ es una proyección. En cuyo caso se verifica que $P(X) = \ker(I - P)$, $\ker(P) = (I - P)(X)$ y $X = P(X) \oplus \ker(P)$*

Vamos a ver que en todo espacio vectorial hay una correspondencia biunívoca entre sumas directas y proyecciones.

Proposición. *Sea X un espacio vectorial, $P : X \to X$ una aplicación lineal, y M, N subespacios de X.*

- *P es una proyección si, y sólo si, $I - P$ es una proyección. En cuyo caso se verifica que $P(X) = \ker(I - P)$, $\ker(P) = (I - P)(X)$ y $X = P(X) \oplus \ker(P)$*
- *Si $X = M \oplus N$ entonces hay una única proyección P tal que $P(X) = M$ y $\ker(P) = N$. Se dice que P es la proyección de X sobre M con núcleo N.*

Vamos a ver que en todo espacio vectorial hay una correspondencia biunívoca entre sumas directas y proyecciones.

Proposición. *Sea X un espacio vectorial, $P : X \to X$ una aplicación lineal, y M, N subespacios de X.*

- *P es una proyección si, y sólo si, $I - P$ es una proyección. En cuyo caso se verifica que $P(X) = \ker(I - P)$, $\ker(P) = (I - P)(X)$ y $X = P(X) \oplus \ker(P)$*
- *Si $X = M \oplus N$ entonces hay una única proyección P tal que $P(X) = M$ y $\ker(P) = N$. Se dice que P es la proyección de X sobre M con núcleo N.*

Vamos a ver que en todo espacio vectorial hay una correspondencia biunívoca entre sumas directas y proyecciones.

Proposición. *Sea X un espacio vectorial, $P : X \to X$ una aplicación lineal, y M, N subespacios de X.*

- *P es una proyección si, y sólo si, $I - P$ es una proyección. En cuyo caso se verifica que $P(X) = \ker(I - P)$, $\ker(P) = (I - P)(X)$ y $X = P(X) \oplus \ker(P)$*
- *Si $X = M \oplus N$ entonces hay una única proyección P tal que $P(X) = M$ y $\ker(P) = N$. Se dice que P es la proyección de X sobre M con núcleo N.*

Sean ahora M y N subespacios vectoriales cualesquiera de un espacio vectorial X y consideremos la aplicación

$$\psi : N \to X/M, \qquad \psi(x) = x + M \quad \forall x \in N \tag{1}$$

que es la restricción a N de la aplicación cociente.

Vamos a ver que en todo espacio vectorial hay una correspondencia biunívoca entre sumas directas y proyecciones.

Proposición. *Sea X un espacio vectorial, $P : X \to X$ una aplicación lineal, y M, N subespacios de X.*

- *P es una proyección si, y sólo si, $I - P$ es una proyección. En cuyo caso se verifica que $P(X) = \ker(I - P)$, $\ker(P) = (I - P)(X)$ y $X = P(X) \oplus \ker(P)$*
- *Si $X = M \oplus N$ entonces hay una única proyección P tal que $P(X) = M$ y $\ker(P) = N$. Se dice que P es la proyección de X sobre M con núcleo N.*

Sean ahora M y N subespacios vectoriales cualesquiera de un espacio vectorial X y consideremos la aplicación

$$\psi : N \to X/M, \qquad \psi(x) = x + M \quad \forall x \in N \tag{1}$$

que es la restricción a N de la aplicación cociente.Es claro que $\ker(\psi) = N \cap M$ y $\psi(N) = N + M$. Por tanto, ψ es una biyección, si, y sólo si, $X = M \oplus N$.

Vamos a ver que en todo espacio vectorial hay una correspondencia biunívoca entre sumas directas y proyecciones.

Proposición. *Sea X un espacio vectorial, $P : X \to X$ una aplicación lineal, y M, N subespacios de X.*

- *P es una proyección si, y sólo si, $I - P$ es una proyección. En cuyo caso se verifica que $P(X) = \ker(I - P)$, $\ker(P) = (I - P)(X)$ y $X = P(X) \oplus \ker(P)$*
- *Si $X = M \oplus N$ entonces hay una única proyección P tal que $P(X) = M$ y $\ker(P) = N$. Se dice que P es la proyección de X sobre M con núcleo N.*

Sean ahora M y N subespacios vectoriales cualesquiera de un espacio vectorial X y consideremos la aplicación

$$\psi : N \to X/M, \qquad \psi(x) = x + M \quad \forall x \in N \tag{1}$$

que es la restricción a N de la aplicación cociente.Es claro que $\ker(\psi) = N \cap M$ y $\psi(N) = N + M$. Por tanto, ψ es una biyección, si, y sólo si, $X = M \oplus N$.Deducimos que *cualquier complemento algebraico de M es isomorfo al espacio vectorial cociente X/M.*

Vamos a ver que en todo espacio vectorial hay una correspondencia biunívoca entre sumas directas y proyecciones.

Proposición. *Sea X un espacio vectorial, $P : X \to X$ una aplicación lineal, y M, N subespacios de X.*

- *P es una proyección si, y sólo si, $I - P$ es una proyección. En cuyo caso se verifica que $P(X) = \ker(I-P)$, $\ker(P) = (I-P)(X)$ y $X = P(X) \oplus \ker(P)$*
- *Si $X = M \oplus N$ entonces hay una única proyección P tal que $P(X) = M$ y $\ker(P) = N$. Se dice que P es la proyección de X sobre M con núcleo N.*

Sean ahora M y N subespacios vectoriales cualesquiera de un espacio vectorial X y consideremos la aplicación

$$\psi : N \to X/M, \qquad \psi(x) = x + M \quad \forall x \in N \tag{1}$$

que es la restricción a N de la aplicación cociente.Es claro que $\ker(\psi) = N \cap M$ y $\psi(N) = N + M$. Por tanto, ψ es una biyección, si, y sólo si, $X = M \oplus N$.Deducimos que *cualquier complemento algebraico de M es isomorfo al espacio vectorial cociente X/M*.Además, en tal caso, llamando P y $Q = I - P$ a las proyecciones de X sobre M y N, se verifica que

$$\psi^{-1} : X/M \to N, \quad \psi^{-1}(x+M) = \psi^{-1}(Px+Qx+M) = \psi^{-1}(Qx+M) = Qx \ \ \forall x \in X \tag{2}$$

por tanto, $\psi^{-1} \circ \pi = Q = I - P$.

En las mismas hipótesis, también podemos considerar la aplicación

$$\Phi : M \times N \to X, \qquad \Phi(x,y) = x + y \quad \forall (x,y) \in M \times N \tag{3}$$

En las mismas hipótesis, también podemos considerar la aplicación

$$\Phi : M \times N \to X, \qquad \Phi(x,y) = x + y \quad \forall (x,y) \in M \times N \tag{3}$$

Es claro que Φ es lineal y $\ker(\Phi) = \{x \in M : (x, -x) \in M \cap N\}$ y $\Phi(M \times N) = M + N$.

En las mismas hipótesis, también podemos considerar la aplicación

$$\Phi : M \times N \to X, \qquad \Phi(x,y) = x + y \quad \forall (x,y) \in M \times N \tag{3}$$

Es claro que Φ es lineal y $\ker(\Phi) = \{x \in M : (x, -x) \in M \cap N\}$ y $\Phi(M \times N) = M + N$.Por tanto, Φ es una biyección, si, y sólo si, $X = M \oplus N$.

En las mismas hipótesis, también podemos considerar la aplicación

$$\Phi : M \times N \to X, \qquad \Phi(x,y) = x + y \quad \forall (x,y) \in M \times N \tag{3}$$

Es claro que Φ es lineal y $\ker(\Phi) = \{x \in M : (x, -x) \in M \cap N\}$ y $\Phi(M \times N) = M + N$.Por tanto, Φ es una biyección, si, y sólo si, $X = M \oplus N$.Además, en tal caso, llamando P a la proyección de X sobre M y $Q = I - P$ a la proyección de X sobre N, se tiene que la aplicación inversa de Φ viene dada por

$$\Phi^{-1} : X \to M \times N, \quad \Phi^{-1}(x) = (Px, Qx) = (Px, x - Px) \quad \forall x \in X \tag{4}$$

En las mismas hipótesis, también podemos considerar la aplicación

$$\Phi : M \times N \to X, \qquad \Phi(x,y) = x + y \quad \forall (x,y) \in M \times N \tag{3}$$

Es claro que Φ es lineal y $\ker(\Phi) = \{x \in M : (x, -x) \in M \cap N\}$ y $\Phi(M \times N) = M + N$.Por tanto, Φ es una biyección, si, y sólo si, $X = M \oplus N$.Además, en tal caso, llamando P a la proyección de X sobre M y $Q = I - P$ a la proyección de X sobre N, se tiene que la aplicación inversa de Φ viene dada por

$$\Phi^{-1} : X \to M \times N, \quad \Phi^{-1}(x) = (Px, Qx) = (Px, x - Px) \quad \forall x \in X \tag{4}$$

En el caso en que X sea un espacio normado y P una proyección *continua*, se tiene que $P(X) = \ker(I - P)$ y $\ker(P)$ son espacios cerrados en X y, claro está, $X = P(X) \oplus \ker(P)$.

En las mismas hipótesis, también podemos considerar la aplicación

$$\Phi : M \times N \to X, \qquad \Phi(x,y) = x + y \quad \forall (x,y) \in M \times N \tag{3}$$

Es claro que Φ es lineal y $\ker(\Phi) = \{x \in M : (x,-x) \in M \cap N\}$ y $\Phi(M \times N) = M + N$.Por tanto, Φ es una biyección, si, y sólo si, $X = M \oplus N$.Además, en tal caso, llamando P a la proyección de X sobre M y $Q = I - P$ a la proyección de X sobre N, se tiene que la aplicación inversa de Φ viene dada por

$$\Phi^{-1} : X \to M \times N, \quad \Phi^{-1}(x) = (Px, Qx) = (Px, x - Px) \quad \forall x \in X \tag{4}$$

En el caso en que X sea un espacio normado y P una proyección *continua*, se tiene que $P(X) = \ker(I - P)$ y $\ker(P)$ son espacios cerrados en X y, claro está, $X = P(X) \oplus \ker(P)$.

Sin embargo, en el caso de los espacios normados, puede ocurrir que tengamos un subespacio cerrado, M, que no tenga ningún complemento algebraico que también sea cerrado, lo que implica que no hay ninguna proyección *continua* de X sobre M.

También puede ocurrir que un espacio normado sea suma directa de dos subespacios cerrados pero las proyecciones correspondientes no sean continuas.

También puede ocurrir que un espacio normado sea suma directa de dos subespacios cerrados pero las proyecciones correspondientes no sean continuas.Aunque, como veremos, esto último no puede ocurrir en los espacios de Banach.

También puede ocurrir que un espacio normado sea suma directa de dos subespacios cerrados pero las proyecciones correspondientes no sean continuas.Aunque, como veremos, esto último no puede ocurrir en los espacios de Banach.Por tanto, en los espacios normados no hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones continuas.

También puede ocurrir que un espacio normado sea suma directa de dos subespacios cerrados pero las proyecciones correspondientes no sean continuas.Aunque, como veremos, esto último no puede ocurrir en los espacios de Banach.Por tanto, en los espacios normados no hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones continuas.

Se dice que un subespacio cerrado M de un espacio normado X está **complementado** en X cuando existe una proyección lineal continua $P : X \to X$ tal que $P(X) = M$

También puede ocurrir que un espacio normado sea suma directa de dos subespacios cerrados pero las proyecciones correspondientes no sean continuas.Aunque, como veremos, esto último no puede ocurrir en los espacios de Banach.Por tanto, en los espacios normados no hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones continuas.

Se dice que un subespacio cerrado M de un espacio normado X está **complementado** en X cuando existe una proyección lineal continua $P : X \to X$ tal que $P(X) = M$. En tal caso, poniendo $N = \ker(P) = (I - P)(X)$, se tiene que $X = M \oplus N$ y se dice que X es suma **suma topológico directa** de M y N y cada uno de estos espacios se dice que es un **complemento topológico** del otro.

También puede ocurrir que un espacio normado sea suma directa de dos subespacios cerrados pero las proyecciones correspondientes no sean continuas.Aunque, como veremos, esto último no puede ocurrir en los espacios de Banach.Por tanto, en los espacios normados no hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones continuas.

Se dice que un subespacio cerrado M de un espacio normado X está **complementado** en X cuando existe una proyección lineal continua $P : X \to X$ tal que $P(X) = M$. En tal caso, poniendo $N = \ker(P) = (I - P)(X)$, se tiene que $X = M \oplus N$ y se dice que X es suma **suma topológico directa** de M y N y cada uno de estos espacios se dice que es un **complemento topológico** del otro.

Proposición. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio normado X tales que*
$X = M \oplus N$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

También puede ocurrir que un espacio normado sea suma directa de dos subespacios cerrados pero las proyecciones correspondientes no sean continuas.Aunque, como veremos, esto último no puede ocurrir en los espacios de Banach.Por tanto, en los espacios normados no hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones continuas.

Se dice que un subespacio cerrado M de un espacio normado X está **complementado** en X cuando existe una proyección lineal continua $P : X \to X$ tal que $P(X) = M$. En tal caso, poniendo $N = \ker(P) = (I - P)(X)$, se tiene que $X = M \oplus N$ y se dice que X es suma **suma topológico directa** de M y N y cada uno de estos espacios se dice que es un **complemento topológico** del otro.

Proposición. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio normado X tales que*
$X = M \oplus N$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) *$X = M \oplus N$ es suma topológico directa de M y N.*

También puede ocurrir que un espacio normado sea suma directa de dos subespacios cerrados pero las proyecciones correspondientes no sean continuas.Aunque, como veremos, esto último no puede ocurrir en los espacios de Banach.Por tanto, en los espacios normados no hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones continuas.

Se dice que un subespacio cerrado M de un espacio normado X está **complementado** en X cuando existe una proyección lineal continua $P : X \to X$ tal que $P(X) = M$. En tal caso, poniendo $N = \ker(P) = (I - P)(X)$, se tiene que $X = M \oplus N$ y se dice que X es suma **suma topológico directa** de M y N y cada uno de estos espacios se dice que es un **complemento topológico** del otro.

Proposición. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio normado X tales que*
$X = M \oplus N$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) *$X = M \oplus N$ es suma topológico directa de M y N.*
ii) *La aplicación $\psi : N \to X/M$ definida por $\psi(x) = x + M$ para todo $x \in N$ es un isomorfismo topológico.*

También puede ocurrir que un espacio normado sea suma directa de dos subespacios cerrados pero las proyecciones correspondientes no sean continuas.Aunque, como veremos, esto último no puede ocurrir en los espacios de Banach.Por tanto, en los espacios normados no hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones continuas.

Se dice que un subespacio cerrado M de un espacio normado X está **complementado** en X cuando existe una proyección lineal continua $P : X \to X$ tal que $P(X) = M$. En tal caso, poniendo $N = \ker(P) = (I - P)(X)$, se tiene que $X = M \oplus N$ y se dice que X es suma **suma topológico directa** de M y N y cada uno de estos espacios se dice que es un **complemento topológico** del otro.

Proposición. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio normado X tales que*
$X = M \oplus N$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) *$X = M \oplus N$ es suma topológico directa de M y N.*
ii) *La aplicación $\psi : N \to X/M$ definida por $\psi(x) = x + M$ para todo $x \in N$ es un isomorfismo topológico.*
iii) *La aplicación $\Phi : M \times N \to X$ definida por $\Phi(x,y) = x + y$ para todo $(x,y) \in M \times N$ es un isomorfismo topológico.*

También puede ocurrir que un espacio normado sea suma directa de dos subespacios cerrados pero las proyecciones correspondientes no sean continuas.Aunque, como veremos, esto último no puede ocurrir en los espacios de Banach.Por tanto, en los espacios normados no hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones continuas.

Se dice que un subespacio cerrado M de un espacio normado X está **complementado** en X cuando existe una proyección lineal continua $P : X \to X$ tal que $P(X) = M$. En tal caso, poniendo $N = \ker(P) = (I - P)(X)$, se tiene que $X = M \oplus N$ y se dice que X es suma **suma topológico directa** de M y N y cada uno de estos espacios se dice que es un **complemento topológico** del otro.

Proposición. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio normado X tales que*
$X = M \oplus N$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) *$X = M \oplus N$ es suma topológico directa de M y N.*
ii) *La aplicación $\psi : N \to X/M$ definida por $\psi(x) = x + M$ para todo $x \in N$ es un isomorfismo topológico.*
iii) *La aplicación $\Phi : M \times N \to X$ definida por $\Phi(x,y) = x + y$ para todo $(x,y) \in M \times N$ es un isomorfismo topológico.*

También puede ocurrir que un espacio normado sea suma directa de dos subespacios cerrados pero las proyecciones correspondientes no sean continuas.Aunque, como veremos, esto último no puede ocurrir en los espacios de Banach.Por tanto, en los espacios normados no hay una correspondencia biunívoca entre subespacios cerrados y proyecciones continuas.

Se dice que un subespacio cerrado M de un espacio normado X está **complementado** en X cuando existe una proyección lineal continua $P : X \to X$ tal que $P(X) = M$. En tal caso, poniendo $N = \ker(P) = (I - P)(X)$, se tiene que $X = M \oplus N$ y se dice que X es suma **suma topológico directa** de M y N y cada uno de estos espacios se dice que es un **complemento topológico** del otro.

Proposición. *Sean M y N subespacios cerrados de un espacio normado X tales que*
$X = M \oplus N$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

i) *$X = M \oplus N$ es suma topológico directa de M y N.*

ii) *La aplicación $\psi : N \to X/M$ definida por $\psi(x) = x + M$ para todo $x \in N$ es un isomorfismo topológico.*

iii) *La aplicación $\Phi : M \times N \to X$ definida por $\Phi(x, y) = x + y$ para todo $(x, y) \in M \times N$ es un isomorfismo topológico.*

Proposición. *Sea X un espacio normado y $M \subset X$ un subespacio cerrado de codimensión finita. Entonces todo complemento algebraico de M en X es un complemento topológico*.